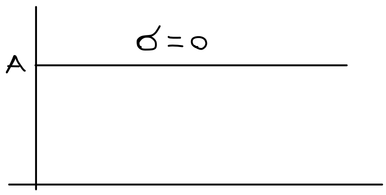
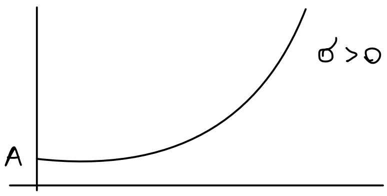
SEGNALI = funzioni del tempo che descrivono come una certa quantità evolve nel tempo

ESPONENZIALI

$$y(t) = Ae^{\sigma t} \qquad t \geq 0$$

ESPONENZIALI CONVERGENTI
$\longrightarrow$ STABILITÀ





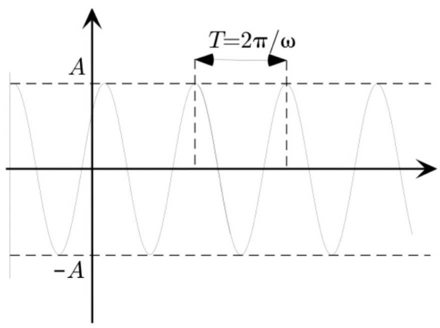
ESPONENZIALI DIVERGENTI
$\longrightarrow$ INSTABILITÀ

SINUSOIDALI

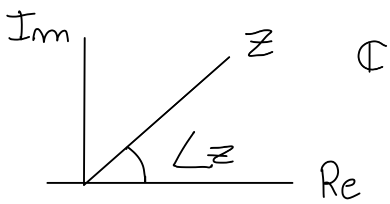
$$y(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad t \geq 0$$

periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ frequenza $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ ϕ = fase ω = pulsazione

A = ampiezza



NUMERI COMPLESSI



$z = (x, y) = x + jy$ $\qquad \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ $\qquad z \in \mathbb{C}$

j unità immaginaria $\qquad j^2 = -1$

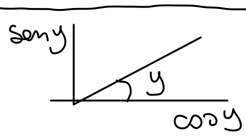
$z = x + jy$
$\bar{z} = x - jy$

$z\bar{z} = (x+jy)(x-jy) = x^2 + y^2 = |z|^2$

$\hookrightarrow$ lunghezza del segmento $\overline{0z}$

$\angle z$ = fase del numero complesso

$$e^z = e^{x+jy} = e^x e^{jy} = \underbrace{e^x}_{Re}\underbrace{(\cos y + j\operatorname{sen} y)}$$



$$|\cos y + j\operatorname{sen} y| = \sqrt{\cos^2 + \operatorname{sen}^2} = 1$$

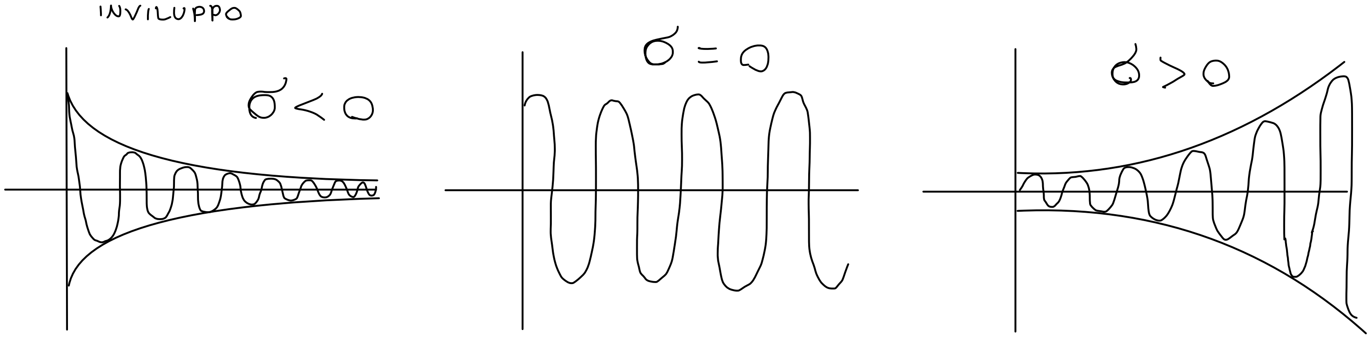
$\longrightarrow$ SINUSOIDALE (con i complessi)

$$y(t) = A\cos(\omega t + \phi) = \mathrm{Re}\left(Ae^{j(\omega t+\phi)}\right) = \mathrm{Re}\left(Ae^{j\omega t}e^{j\phi}\right) = \mathrm{Re}\left(ae^{j\omega t}\right)$$

con $a = Ae^{j\phi} \in \mathbb{C}$ $\quad A = |a| \quad \phi = \angle a$

ESPONENZIALE SINUSOIDALE

$$y(t) = \underbrace{Ae^{\sigma t}}_{\substack{\text{exp} \\ \text{INVILUPPO}}} \underbrace{\cos(\omega t + \phi)}_{\text{sinusoidale}} \qquad t \geq 0$$



$$y(t) = Ae^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi) = \mathrm{Re}\left[Ae^{\sigma t}e^{j(\omega t+\phi)}\right] = \mathrm{Re}\left[Ae^{\sigma t + j(\omega t + \phi)}\right]$$

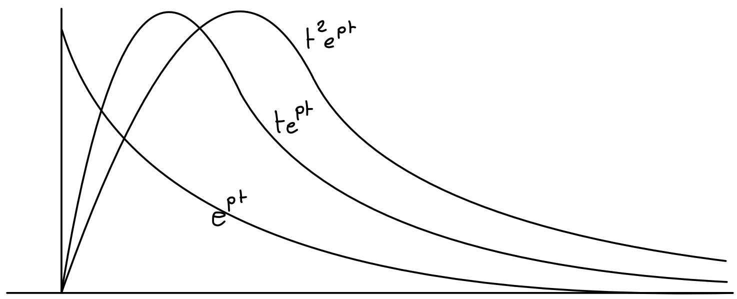
$$\overset{!}{=} \mathrm{Re}\left[Ae^{j\phi}e^{(\sigma + j\omega)t}\right] = \mathrm{Re}\left[ae^{pt}\right]$$

con $p = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$ $\qquad a = Ae^{j\phi} \in \mathbb{C}$

$\sigma = \mathrm{Re}[p] \qquad \omega = \mathrm{Im}[p] \qquad A = |a| \qquad \phi = \angle a$

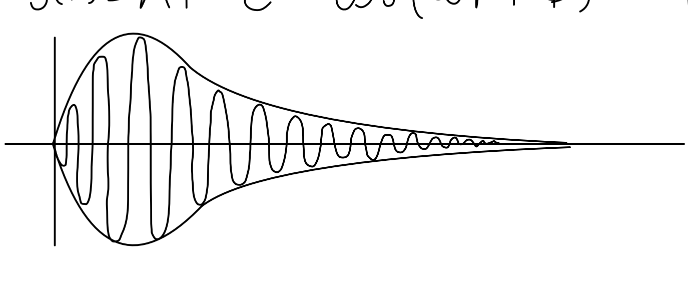
ESPONENZIALE POLINOMIALE

$$y(t) = At^m e^{\sigma t} \qquad t \geq 0$$



GENERALIZZAZIONE

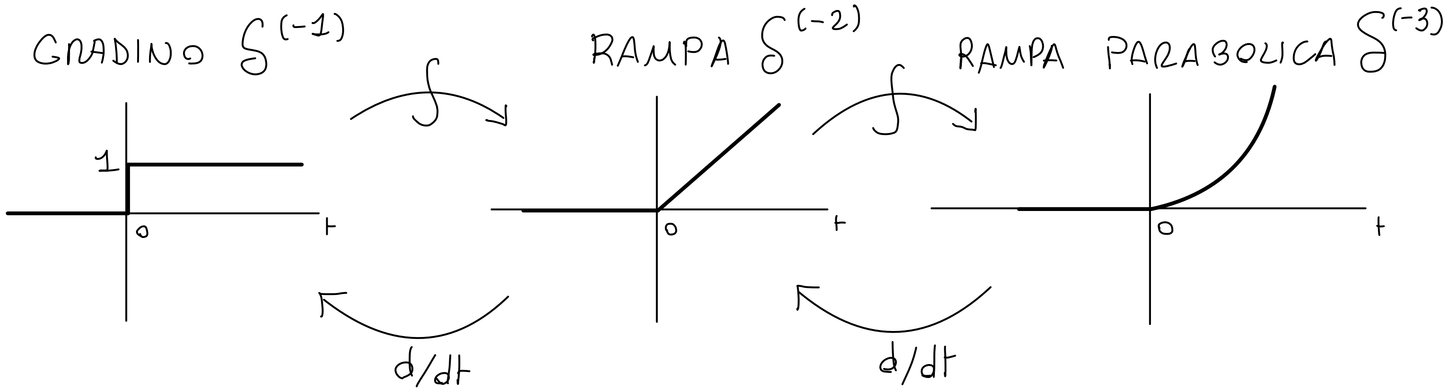
$$y(t) = At^m e^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi) \qquad t \geq 0$$



SEGNALI CANONICI

Sono casi particolari per $p=0$, $a=1$ $\quad (p=\sigma+j\omega,\ a=Ae^{j\phi})$

$$\delta^{(-k)}(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!} & t\geq 0\end{cases}$$ $\longrightarrow$ segnali causali (nulli per $t<0$)



(Sono segnali utili per definire le performance del sistema e per fare operazioni tra segnali più complessi (es. per rendere causale un segnale non causale senza modificarlo si usa il gradino))

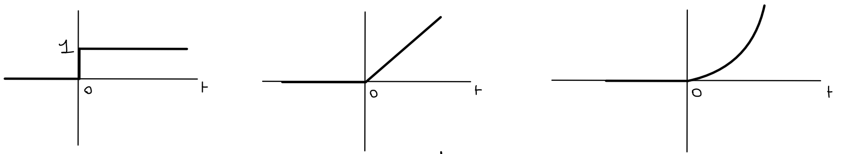
per ricavare un segnale dall'altro:

- $\dfrac{d\,\delta^{(-k)}}{dt}(t)=\delta^{(-k+1)}(t)$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{t}\delta^{(-k)}(\tau)\,d\tau=\delta^{(-k-1)}(t)$

LEZIONE 3

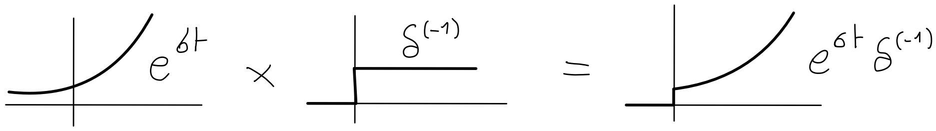
SEGNALI CANONICI

GRADINO $\delta^{(-1)}$ RAMPA $\delta^{(-2)}$ RAMPA PARABOLICA $\delta^{(-3)}$



SUPPORTO DEL SEGNALE = dove il segnale non è nullo

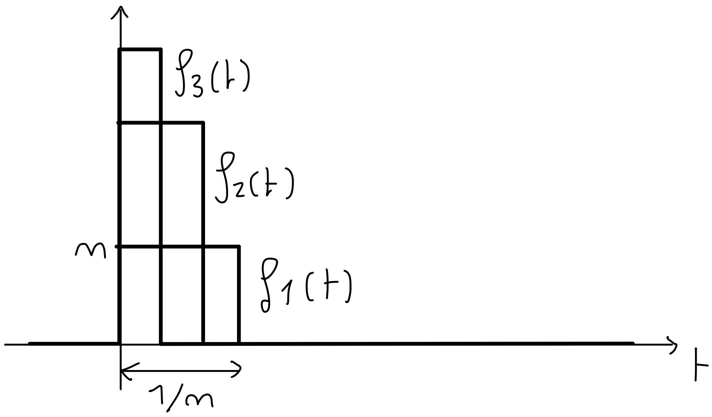
→ OPERAZIONI TRA SEGNALI



DELTA DI DIRAC

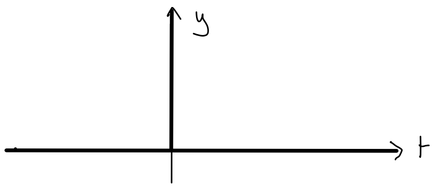
$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ n & 0 \le t \le 1/n \\ 0 & t > 1/n \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt = 1$$



DELTA DI DIRAC → $\delta(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ è una funzione generalizzata:
→ DISTRIBUZIONE

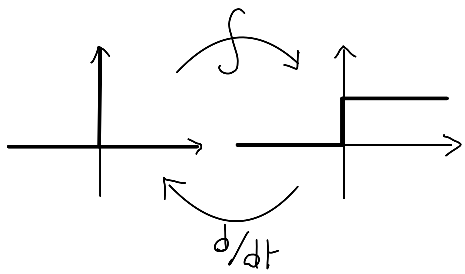
SEGNALE DELTA DI DIRAC



in 0 assume valore ∞
vale 0 ovunque

derivata del gradino è il delta di dirac

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1 \rightarrow \int_{-\infty}^{t} \delta(t)\,dt = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$ $\Rightarrow$
  $\underset{\delta^{(-1)} \text{ GRADINO}}{\shortparallel}$
- $\frac{d\,\delta^{(-1)}}{dt}(t) = \delta(t)$



PROPRIETÀ DI CAMPIONAMENTO DELL'IMPULSO = PROPRIETÀ RIVELATRICE

$\delta(t)g(t) = \delta(t)g(0)$ poiché $\delta(t-T)$ è $\delta(t)$ traslato di T

$\rightarrow \delta(t-T)g(t) = \delta(t-T)g(T)$

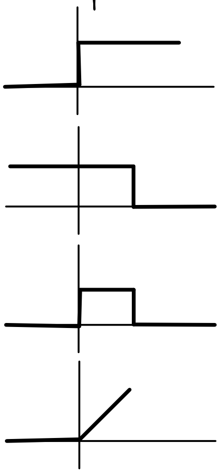
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t-T)g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{t} \delta(t-T)g(T)\,dt = g(T)\int_{-\infty}^{t} \delta(t-T)\,dt = \begin{cases} 0 & t<T \\ g(T) & t>T \end{cases}$$

PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

$u(t)$, $w(t) \longrightarrow$ segnali $\longrightarrow y = w * u$ $\qquad (\neq w \times u)$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} w(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$ τ variabile di integrazione

indica un evento accaduto in τ e uno "strascico" dal momento τ al momento t
esempio:



$u(\tau)$

$w(t-\tau)$

$w(t-\tau)u(\tau)$

$u * w = \int w(t-\tau)u(\tau)d\tau$

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

- COMMUTATIVA $\quad u * w = w * u$
- DISTRIBUTIVA $\quad w * (u_1 + u_2) = w * u_1 + w * u_2$
- CONVOLUZIONE CON IL DELTA DI DIRAC

$$w * \delta = w \longrightarrow \int w(t-\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau \underset{\text{proprietà rivelatrice}}{=} \int w(t)\,\delta(\tau)\,d\tau = w(t)\underbrace{\int \delta(\tau)d\tau}_{=1} = w(t)$$

- $$w * u = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \int_0^t w(t-\tau)u(\tau)d\tau & t>0 \end{cases}$$

TRASFORMATA DI LAPLACE $\mathcal{L}$

Operatore matematico che permette di trasformare una funzione del tempo in una funzione a variabile complessa e a valori complessi

$$\begin{tikzcd} \underset{t\in\mathbb{R}\ (\text{reale})}{f(t)} \arrow[r, bend left, "\mathcal{L}"] & \underset{s\in\mathbb{C}\ (\text{complesso})}{F(s)} \arrow[l, bend left, "\mathcal{L}^{-1}\ (\text{antitrasformata})"] \end{tikzcd}$$

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt = \mathcal{L}[f(t)]$$

- SEGNALE δ :

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad \longrightarrow F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

- SEGNALI SINUSOIDALI ED ESPONENZIALI:

$$\mathcal{L}[t^m e^{pt} \delta^{(-1)}(t)] = \frac{m!}{(s-p)^{m+1}} \qquad \mathcal{L}[e^{pt}] = \frac{1}{s-p}$$

- SEGNALI CANONICI

GRADINO di ordine m $\quad \mathcal{L}[\delta^{(-m)}(t)] = \frac{1}{s^m}$

PROPRIETÀ DI $\mathcal{L}$

1. TRASFORMATA e ANTITRASFORMATA sono OPERATORI LINEARI:

$$\mathcal{L}[a f(t) + b g(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$$

2. $\mathcal{L}$ trasforma la CONVOLUZIONE in PRODOTTO:

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)]$$

3. TRASLAZIONE:

$$\mathcal{L}[f(t-T)] = e^{-sT}\mathcal{L}[f(t)]$$

4. INTEGRAZIONE e DERIVAZIONE:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(z)dz\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0^-)$$

$\longrightarrow$ per derivate successive $\mathcal{L}[f^k] = s^k \mathcal{L}[f] - \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} s^i f^{(k-i-1)}(0^-)}_{\text{condizioni iniziali}}$

condizioni iniziali per t, t', t'' ...

$\downarrow \quad \downarrow$

$f^{(1)} \quad f^{(11)}$ ...

TRASFORMAZIONE DI SEGNALI ELEMENTARI

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

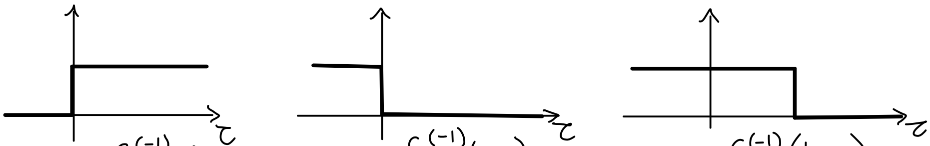
$$\mathcal{L}[\delta^{(-1)}(t) = \text{GRADINO}] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[\delta^{(-2)}(t) = \text{RAMPA}] = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{pt} = \text{EXP}] = \frac{1}{s-p}$$

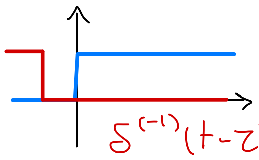
NOTA SULLA CONVOLUZIONE DI GRADINI

$$y(t) = \delta^{(-1)}(t) * \delta^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(-1)}(\tau)\, \delta^{(-1)}(t-\tau)\, d\tau$$



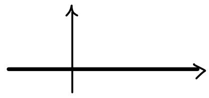
$\delta^{(-1)}(\tau)$ $\quad$ $\delta^{(-1)}(-\tau)$ $\quad$ $\delta^{(-1)}(t-\tau)$

- $t<0$

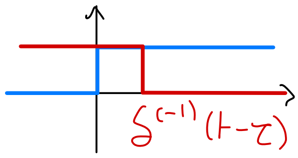


$\delta^{(-1)}(t-\tau)$ $\quad$ $\delta^{(-1)}(\tau)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta^{(-1)}(\tau)\, \delta^{(-1)}(t-\tau)}_{0}\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \, d\tau = 0$$

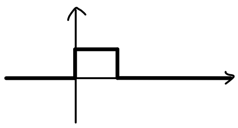


- $t \geq 0$



$\delta^{(-1)}(t-\tau)$ $\quad$ $\delta^{(-1)}(\tau)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta^{(-1)}(\tau)\, \delta^{(-1)}(t-\tau)}_{1}\, d\tau = \int_{0}^{1} d\tau = t$$



$$\Rightarrow \quad y(t) = \delta^{(-1)}(t) * \delta^{(-1)}(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad y(t) = t\, \delta^{(-1)}(t) = \delta^{(-2)}(t) \quad \text{rampa}$$