

LEZIONE 4

MODELLO INGRESSO - USCITA

Le grandezze fondamentali sono l'ingresso e l'uscita

EQUAZIONI DIFFERENZIALI \rightarrow equazioni con incognita un segnale

$$\frac{dy(t)}{dt} = y^{(1)}(t) = y'(t) = \dot{y}(t)$$

• $y'(t) + y(t) = 0 \rightarrow$ soluzione $y(t) = e^{-t}$

$$\left. \begin{array}{l} y(t) = e^{-t} \\ y'(t) = -e^{-t} \end{array} \right\} \Rightarrow -e^{-t} + e^{-t} = 0$$

• $y'(t) + y(t) = \delta^{(-1)}(t) \rightarrow$ soluzione $y(t) = (1 - e^{-t}) \delta^{(-1)}(t)$

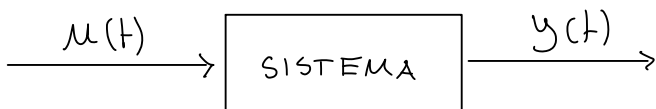
- derivo la funzione senza gradino e ci applico poi il gradino per rendere causale anche la derivata:

$$\underbrace{y'(t) = e^{-t} \delta^{(-1)}(t)}_{\substack{\text{TENGO IL GRADINO} \\ \text{FUORI DALLA DERIVATA}}} \rightarrow \underbrace{e^{-t} \delta^{(-1)}(t)}_{y'(t)} + \underbrace{\delta^{(-1)}(t) - e^{-t} \delta^{(-1)}(t)}_{y(t)} = \delta^{(-1)}(t)$$

- derivo tutto assieme, con il gradino "dentro alla derivata":

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (\delta^{(-1)}(t) - e^{-t} \delta^{(-1)}(t)) = \delta(t) - \underbrace{\delta(t) e^{-t}}_{=\delta(t)} + e^{-t} \delta^{(-1)}(t) = e^{-t} \delta^{(-1)}(t)$$

MODELLO DEL SISTEMA (ingresso - uscita)



$$\underbrace{a_m y^{(m)} + a_{m-1} y^{(m-1)} + \dots + a_0 y}_{\text{uscita e le sue derivate}} = \underbrace{b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_0 u}_{\text{ingresso e le sue derivate}}$$

$y^{(k)}$ e $u^{(k)}$ = derivate k -esime dei segnali causali $y(t)$ e $u(t)$

$$\rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^m a_k y^{(k)} = \sum_{k=0}^m b_k u^{(k)}}$$

la soluzione generale dell'equazione differenziale può essere ottenuta attraverso le trasformate di Laplace

$$\sum_{k=0}^m a_k y^{(k)} = \sum_{k=0}^m b_k u^{(k)} \rightarrow \mathcal{L} \left[\sum_{k=0}^m a_k y^{(k)} \right] (s) = \mathcal{L} \left[\sum_{k=0}^m b_k u^{(k)} \right] (s)$$

uso la linearità delle trasformate:

$$\sum a_k \mathcal{L}[y^{(k)}](s) = \sum b_k \mathcal{L}[u^{(k)}](s)$$

pongo $Y(s) = \mathcal{L}[y]$ $U(s) = \mathcal{L}[u]$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^m a_k \left[s^k Y(s) - \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} s^i y^{(k-i-1)}(0^-)}_{\text{condizione iniziale}} \right] = \sum_{k=0}^m b_k \left[s^k U(s) - \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} s^i u^{(k-i-1)}(0^-)}_{\text{posso semplificare}} \right]$$

siccome considero che $u(t) = 0$ per $t < 0$ (causale) posso eliminare le sue condizioni iniziali ($t < 0$)

$$\rightarrow \sum_{k=0}^m a_k s^k Y(s) - \sum_{k=0}^m a_k \sum_{i=0}^{k-1} s^i y^{(k-i-1)}(0^-) = \sum_{k=0}^m b_k s^k U(s)$$

devo avere $m \geq m$

$$\text{USCITA } Y(s) = \frac{\sum_{k=0}^m a_k \sum_{i=0}^{k-1} s^i y^{(k-i-1)}(0^-)}{\sum_{k=0}^m a_k s^k} + \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{k=0}^m a_k s^k} U(s)$$

RISPOSTA LIBERA DEL SISTEMA
 $Y_l(s)$

RISPOSTA FORZATA
 $Y_f(s)$

rapporto tra due polinomi
NUM di grado max $m-1$ / DEN di grado max m
RAPPORTO STRETTAMENTE PROPRIO (NUM < DEN)
 $m-1 < m$

rapporto tra polinomi
NUM max m
DEN max m
RAPPORTO PROPRIO (NUM \leq DEN)
 $m \leq m$

non vedo nulla dell'ingresso in questo termine, indica come il sistema evolve da solo a partire dalle condizioni iniziali (i coefficienti sono relativi all'uscita a_k)

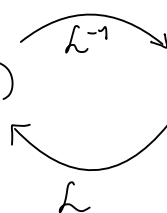
termine che dipende dall'ingresso (i coefficienti sono relativi sia a ingresso che uscita a_k e b_k)

DOMINIO DI LAPLACE (COMPLESSO)

$$Y(s) = Y_l(s) + Y_f(s) \rightarrow Y(s)$$

dipende da
condizioni iniziali

dipende da
ingresso



DOMINIO DEL TEMPO

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t)$$

$$y_l(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_l(s)]$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_f(s)]$$

RISPOSTA LIBERA

$$Y_L(s) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{i=0}^{k-1} s^i y^{(k-i-1)}(0^-)}{\sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k}$$

funzione razionale strettamente propria
(NUM < DEN) ($m-1 < n$)
posso scomporla in fratti semplici

→ SOMMA DI FRATTI SEMPLICI

$$Y_L(s) = \sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\alpha_{ik}}{(s-p_i)^k}$$

$h = \#$ poli
 $p_i =$ poli della funzione razionale
 $\mu_i =$ molteplicità dei poli
 $\alpha_{ik} =$ calcolato con la formula dei residui

i termini dipendono dalle condizioni iniziali $\alpha_{ik} = \frac{1}{(\mu_i - k)!} \frac{d^{\mu_i - k}}{ds^{\mu_i - k}} \left[(s-p_i)^{\mu_i} Y_L(s) \right]_{s=p_i}$

p_i poli della funzione razionale = soluzioni del polinomio caratteristico $a(s) = \sum a_k s^k = 0$

antitrasformo i singoli fratti semplici:

$\alpha_{ik} =$ costante

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-p_i)^k} \right] (t) = \frac{t^{k-1} e^{p_i t}}{(k-1)!} \mathcal{S}^{(-1)}(t)$$

serve per rendere causale il segnale

$$\rightarrow Y_L(t) = \left(\sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\alpha_{ik}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_i t} \right) \mathcal{S}^{(-1)}(t)$$

le funzioni esponenziali che compongono la $Y_L(t)$ sono MODI della R. LIBERA

componenti in cui posso scomporre l'evoluzione della risposta libera

Se p è un polo di $Y_L(s)$ non reale con molteplicità μ , allora esiste un altro polo di $Y_L(s)$ che vale \bar{p} (complesso coniugato di p)
anche \bar{p} ha molteplicità μ

se $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ sono i residui del polo p in $Y_L(s)$ allora i residui del polo \bar{p} in $Y_L(s)$ sono $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_\mu$

segue che:

$$\frac{\alpha_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{pt} + \frac{\bar{\alpha}_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\bar{p}t} = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\alpha_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{pt} \right] = \frac{2|\alpha_k|}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\sigma t} \cos(\omega t + \angle \alpha_k)$$

com $\alpha_k = |\alpha_k| e^{j\angle\alpha_k}$
 $p = \sigma + j\omega$
 $e^{pt} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$

$\bar{\alpha}_k = |\alpha_k| e^{-j\angle\alpha_k}$
 $\bar{p} = \sigma - j\omega$
 $e^{\bar{p}t} = e^{\sigma t} e^{-j\omega t}$

$$\underbrace{\frac{\alpha_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{pt}}_{p\alpha} + \underbrace{\frac{\bar{\alpha}_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\bar{p}t}}_{\bar{p}\bar{\alpha}} = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\alpha_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{pt} \right] = \frac{2|\alpha_k|}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\sigma t} \cos(\omega t + \angle\alpha_k)$$

sopprimere solo la parte reale (cos)

$* e^{j(\angle\alpha_k + \omega t)} + * e^{-j(\angle\alpha_k + \omega t)}$

$* [\cos(\angle\alpha_k + \omega t) + j \sin(\angle\alpha_k + \omega t)] + * [\cos(\angle\alpha_k + \omega t) - j \sin(\angle\alpha_k + \omega t)]$

$y(t)$ è reale dato che i modi complessi si combinano a due a due

RISPOSTA FORZATA

$Y_f(s) = W(s) U(s)$
 funzioni complesse di variabili complesse

com $W(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{k=0}^n a_k s^k} = \text{FUNZIONE DI TRASFERIMENTO}$

$U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$

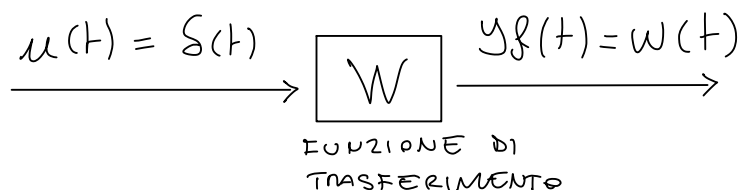
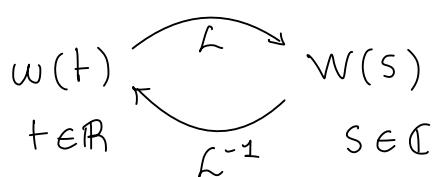
(prodotto in dominio complesso = convoluzione nel dominio del tempo)

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)U(s)] = \mathcal{L}^{-1}[W(s)] * \mathcal{L}^{-1}[U(s)] = (w * u)(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} w(t-\sigma) u(\sigma) d\sigma = \int_0^{+\infty} w(t-\sigma) u(\sigma) d\sigma$$

se $u(t) = \delta(t)$ INGRESSO IMPULSIVO $\rightarrow y_f(t) = w(t)$

$w(t) = \text{RISPOSTA IMPULSIVA}$



$W(s) \rightarrow w(t)$ devo prima decomporre $W(s) = \beta_0 + \bar{W}(s)$
 $W(s)$ è una funzione razionale propria $\rightarrow \text{num}^\circ \leq \text{den}^\circ$
 $m \leq n$

se β_0 all'1 allora $W(s)$ non è strettamente propria
 se $\beta_0 = 0$ allora $W(s)$ è strettamente propria

LEZIONE 5

- se $m = n \rightarrow \beta_0 \neq 0$ ($m_{num} = n_{den}$) (non strettamente propria)

$$W(s) = \beta_0 + \bar{W}(s)$$

decompongo $\bar{W}(s)$ in fattori semplici $\bar{W}(s) = \sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\beta_{ik}}{(s-p_i)^k}$

$$\rightarrow W(s) = \beta_0 + \sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\beta_{ik}}{(s-p_i)^k} \quad \begin{array}{c} u(t) \\ U(s) \end{array} \rightarrow \boxed{W(s)} \xrightarrow{Y_f(t)} \begin{array}{c} Y_f(t) \\ Y_f(s) \end{array}$$

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = \underbrace{\beta_0 U(s)}_{\text{ritorno in uscita } U(s) \text{ scalato di un fattore } \beta_0 \text{ (caratteristica di } \beta_0)} + \underbrace{\sum \dots U(s)}_{\text{questo termine mi scala, trasforma ecc. il segnale } U(s)}$$

antitrasformo:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)](t) = \beta_0 \delta(t) + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\beta_{ik}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_i t} \right)}_{\text{tutti esponenziali quanti sono i poli}} \delta^{(-1)}(t)$$

- $\delta(t)$ = antitrasformata di 1
- p_i sono le radici del polinomio caratteristico $\alpha(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k$
- rispetto alla risposta libera cambiamo i coefficienti β_{ik}
- le funzioni esponenziali in $w(t)$ sono i modi della risposta impulsiva
- i modi complessi si combinano in modo da formare modi reali

RISPOSTA LIBERA E RISPOSTA FORZATA

RISPOSTA LIBERA

$$Y_l(s) = \sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\alpha_{ik}}{(s-p_i)^k} \longrightarrow y_l(t) = \left(\sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\alpha_{ik}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_i t} \right) \delta^{(-1)}(t)$$

$$i \rightarrow p_i \rightarrow \mu_i \Rightarrow \text{soluzioni di } \sum a_k s^k = 0$$

RISPOSTA FORZATA

$$Y_f(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{k=0}^n a_k s^k} U(s) = W(s)U(s) \longrightarrow W(s) = \beta_0 + \sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\beta_{ik}}{(s-p_i)^k}$$

$$\longrightarrow w(t) = \mathcal{L}^{-1}[W](t) = \beta_0 \delta(t) + \left(\sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\beta_{ik}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_i t} \right) \delta^{(-1)}(t)$$