LEZIONE 4

MODELLO INGRESSO - USCITA

Le grandezze fondamentali sono l'ingresso e l'uscita

EQUAZIONI DIFFERENZIALI $\longrightarrow$ equazioni con incognita un segnale

$$\frac{dy(t)}{dt} = y^{(1)}(t) = y'(t) = \dot{y}(t)$$

- $y'(t) + y(t) = 0 \longrightarrow$ soluzione $y(t) = e^{-t}$

$$\left.\begin{array}{l} y(t) = e^{-t} \\ y'(t) = -e^{-t} \end{array}\right\} \Rightarrow -e^{-t} + e^{-t} = 0$$

- $y'(t) + y(t) = \delta^{(-1)}(t) \longrightarrow$ soluzione $y(t) = (1-e^{-t})\overbrace{\delta^{(-1)}(t)}^{\text{rende il segnale causale}}$

– derivo la funzione senza gradino e ci applico poi il gradino per rendere causale anche la derivata :

$$\underbrace{y'(t) = e^{-t}}\ \underbrace{\delta^{(-1)}(t)}_{\text{TENGO IL GRADINO FUORI DALLA DERIVATA}} \longrightarrow \underbrace{e^{-t}\delta^{(-1)}(t)}_{y'(t)} + \underbrace{\delta^{(-1)}(t) - e^{-t}\delta^{(-1)}(t)}_{y(t)} = \delta^{(-1)}(t)$$

– derivo tutto assieme, con il gradino "dentro alla derivata":

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\delta^{(-1)}(t) - e^{-t}\delta^{(-1)}(t)\right) = \delta(t) - \underbrace{\delta(t)e^{-t}}_{=\delta(t)} + e^{-t}\delta^{(-1)}(t) = e^{-t}\delta^{(-1)}(t)$$

MODELLO DEL SISTEMA (ingresso - uscita)

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\text{SISTEMA}} \longrightarrow y(t)$$

$$\underbrace{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y}_{\text{uscita e le sue derivate}} = \underbrace{b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_0 u}_{\text{ingresso e le sue derivate}}$$

$y^{(k)}$ e $u^{(k)}$ = derivate k-esime dei segnali causali $y(t)$ e $u(t)$

$$\longrightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} b_k u^{(k)}}$$

la soluzione generale dell'equazione differenziale può essere ottenuta attraverso le trasformate di Laplace

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} b_k u^{(k)} \longrightarrow \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}\right](s) = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{m} b_k u^{(k)}\right](s)$$

usó la linearità delle trasformate:

$$\sum a_k \mathcal{L}[y^{(k)}](s) = \sum b_k \mathcal{L}[u^{(k)}](s)$$

pongo $Y(s) = \mathcal{L}[y]$ $\quad U(s) = \mathcal{L}[u]$

$$\longrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \Big[s^k Y(s) - \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} s^i y^{(k-i-1)}(0^-)}_{\text{condizione iniziale}} \Big] = \sum_{k=0}^{m} b_k \Big[s^k U(s) - \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} s^i u^{(k-i-1)}(0^-)}_{\text{posso semplificare}} \Big]$$

siccome considero che $u(t) = 0$ per $t<0$ (causale) posso eliminare le sue condizioni iniziali ($t<0$)

$$\longrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k s^k Y(s) - \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} s^i y^{(k-i-1)}(0^-) = \sum_{k=0}^{m} b_k s^k U(s)$$

devo avere $n \geq m$

$$\text{USCITA } Y(s) = \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} s^i y^{(k-i-1)}(0^-)}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k}}_{\text{RISPOSTA LIBERA DEL SISTEMA}} + \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{m} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k} U(s)}_{\text{RISPOSTA FORZATA}}$$

$Y_l(s)$ $\downarrow$

rapporto tra due polinomi
NUM di grado max $n-1$ / DEN di grado max n
RAPPORTO STRETTAMENTE PROPRIO (NUM < DEN)
$n-1 < n$

$\downarrow$

non vedo nulla dell'ingresso in questo termine, indica come il sistema evolve da solo a partire dalle condizioni iniziali (i coefficienti sono relativi all'uscita a_k)

$Y_f(s)$ $\downarrow$

rapporto tra polinomi
NUM max m
DEN max n
RAPPORTO PROPRIO (NUM $\leq$ DEN)
$m \leq n$

$\downarrow$

termine che dipende dall'ingresso (i coefficienti sono relativi sia a ingresso che uscita a_k e b_k)

DOMINIO DI LAPLACE (COMPLESSO)

$$Y(s) = \underbrace{Y_l(s)}_{\substack{\text{dipende da}\\ \text{condizioni iniziali}}} + \underbrace{Y_f(s)}_{\substack{\text{dipende da}\\ \text{ingresso}}} \longrightarrow Y(s) \underset{\mathcal{L}}{\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\rightleftarrows}} y(t) \longrightarrow$$

DOMINIO DEL TEMPO

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t)$$

$$y_l(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_l(s)]$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_f(s)]$$

RISPOSTA LIBERA

$$Y_\ell(s) = \frac{\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=0}^{k-1} s^i y^{(k-i-1)}(0^-)}{\sum_{k=0}^{m} a_k s^k}$$

funzione razionale strettamente propria
(NUM < DEN) $(m-1 < m)$
posso scomporla in fratti semplici

→ SOMMA DI FRATTI SEMPLICI

$$Y_\ell(s) = \sum_{i=1}^{h} \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\alpha_{ik}}{(s-p_i)^k}$$

h = # poli
p_i = poli della funzione razionale
μ_i = molteplicità dei poli
α_{ik} = calcolato con la formula dei residui

↓

i termini dipendono dalle condizioni iniziali $\alpha_{ik} = \frac{1}{(\mu_i-k)!} \frac{d^{\mu_i-k}}{ds^{\mu_i-k}}\left[(s-p_i)^{\mu_i} Y_\ell(s)\right]\Big|_{s=p_i}$

p_i poli della funzione razionale = soluzione del polinomio caratteristico $a(s) = \sum a_k s^k = 0$

antitrasformo i singoli fratti semplici:

α_{ik} = costante

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-p_i)^k}\right](t) = \frac{t^{k-1} e^{p_i t}}{(k-1)!} \underbrace{\delta^{(-1)}(t)}_{\text{serve per rendere causale il segnale}}$$

$$\longrightarrow y_\ell(t) = \left(\sum_{i=1}^{h} \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\alpha_{ik}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_i t} \right) \delta^{(-1)}(t)$$

$\underbrace{\text{le funzioni esponenziali}}_{\text{componenti in cui posso scomporre l'evoluzione della risposta libera}}$ che compongono la $y_\ell(t)$ sono MODI della R. LIBERA

Se p è un polo di $Y_\ell(s)$ non reale con molteplicità μ, allora esiste un altro polo di $Y_\ell(s)$ che vale $\bar{p}$ (complesso coniugato di p)
anche $\bar{p}$ ha molteplicità μ

se $\alpha_1 \dots \alpha_\mu$ sono i residui del polo p in $Y_\ell(s)$ allora i residui del polo $\bar{p}$ in $Y_\ell(s)$ sono $\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_\mu$
segue che:

$$\frac{\alpha_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{pt} + \frac{\bar{\alpha}_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\bar{p}t} = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{\alpha_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{pt}\right] = \frac{2|\alpha_k|}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\sigma t} \cos(\omega t + \angle \alpha_k)$$

con $\alpha_k = |\alpha_k| e^{j\angle\alpha_k}$ $\qquad$ $\bar{\alpha}_k = |\alpha_k| e^{-j\angle\alpha_k}$

$p = \sigma + j\omega$ $\qquad$ $\bar{p} = \sigma - j\omega$

$e^{pt} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$ $\qquad$ $e^{\bar{p}t} = e^{\sigma t} e^{-j\omega t}$

$$\underbrace{\frac{\alpha_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{pt}}_{p\alpha} + \underbrace{\frac{\bar{\alpha}_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\bar{p}t}}_{\overline{p\alpha}} = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{\alpha_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{pt}\right] = \frac{2|\alpha_k|}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\sigma t} \cos(\omega t + \angle\alpha_k)$$

sopravvive solo la parte reale (cos)

$$* \, e^{j(\angle\alpha_k + \omega t)} + * \, e^{-j(\angle\alpha_k + \omega t)}$$

$$* \left[\cos(\angle\alpha_k + \omega t) + j \cancel{\mathrm{sen}(\angle\alpha_k + \omega t)}\right] + * \left[\cos(\angle\alpha_k + \omega t) - j \cancel{\mathrm{sen}(\angle\alpha_k + \omega t)}\right]$$

$y_l(t)$ è reale dato che i modi complessi si combinano a due a due

RISPOSTA FORZATA

$$Y_f(s) = \underbrace{W(s)\,U(s)}_{\text{funzioni complesse di variabili complesse}} \qquad \text{con} \quad W(s) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k} = \text{FUNZIONE DI TRASFERIMENTO}$$

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$$

(prodotto in dominio complesso = convoluzione nel dominio del tempo)

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)U(s)] = \mathcal{L}^{-1}[W(s)] * \mathcal{L}^{-1}[U(s)] = (w * u)(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} w(t-\sigma)\,u(\sigma)\,d\sigma = \int_{0}^{+\infty} w(t-\sigma)\,u(\sigma)\,d\sigma$$

se $u(t) = \delta(t)$ INGRESSO IMPULSIVO $\longrightarrow$ $y_f(t) = w(t)$

$w(t)$ = RISPOSTA IMPULSIVA

$$\underset{t \in \mathbb{R}}{w(t)} \; \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} \; \underset{s \in \mathbb{C}}{W(s)} \qquad \xrightarrow{u(t) = \delta(t)} \boxed{W} \xrightarrow{y_f(t) = w(t)}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$W(s) \longrightarrow w(t)$ devo prima decomporre $W(s) = \beta_0 + \tilde{W}(s)$

$W(s)$ è una funzione razionale propria $\longrightarrow$ num° $\leq$ den°

$m \leq n$

se c'è β_0 allora $W(s)$ non è strettamente propria

se $\beta_0 = 0$ allora $W(s)$ è strettamente propria

LEZIONE 5

- se $m = n \longrightarrow \beta_0 \neq 0$ (num° = den°) (non strettamente propria)

$$W(s) = \beta_0 + \overline{W}(s)$$

decompongo $\overline{W}(s)$ in fattori semplici $\overline{W}(s) = \sum_{i=1}^{h} \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\beta_{ik}}{(s-p_i)^k}$

$$\longrightarrow W(s) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{h} \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\beta_{ik}}{(s-p_i)^k} \qquad \underset{U(s)}{\xrightarrow{u(t)}} \boxed{W(s)} \underset{Y_f(s)}{\xrightarrow{y_f(t)}}$$

$$Y_f(s) = W(s)\,U(s) = \underbrace{\beta_0 \, U(s)}_{\substack{\text{ritrovo in uscita} \\ U(s) \text{ scalato di un} \\ \text{fattore } \beta_0 \text{ (caratteristica di } \beta_0)}} + \underbrace{\sum\sum \dots U(s)}_{\substack{\text{questo termine mi scala,} \\ \text{trasforma ecc. il segnale } U(s)}}$$

antitrasformo:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[W(s)\right](t) = \beta_0 \delta(t) + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{h} \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\beta_{ik}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_i t} \right) \delta^{(-1)}(t)}_{\text{tanti esponenziali quanti sono i poli}}$$

- $\delta(t)$ = antitrasformata di 1
- p_i sono le radici del polinomio caratteristico $a(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k$
- rispetto alla risposta libera cambiamo i coefficienti β_{ik}
- le funzioni esponenziali in $w(t)$ sono i modi della risposta impulsiva
- i modi complessi si combinano in modo da formare modi reali

RISPOSTA LIBERA E RISPOSTA FORZATA

RISPOSTA LIBERA

$$Y_\ell(s) = \sum_{i=1}^{h} \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\alpha_{ik}}{(s-p_i)^k} \longrightarrow y_\ell(t) = \left(\sum_{i=1}^{h} \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\alpha_{ik}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_i t} \right) \delta^{(-1)}(t)$$

$i \rightarrow p_i \rightarrow \mu_i \Rightarrow$ soluzioni di $\sum a_k s^k = 0$

RISPOSTA FORZATA

$$Y_f(s) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k} U(s) = W(s)U(s) \longrightarrow W(s) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{h} \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\beta_{ik}}{(s-p_i)^k}$$

$$\longrightarrow w(t) = \mathcal{L}^{-1}[W](t) = \beta_0 \delta(t) + \left(\sum_{i=1}^{h} \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\beta_{ik}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_i t} \right) \delta^{(-1)}(t)$$